Оценка точности расчета атмосферного давления с использованием барометрических формул

А. И. Драбо, email: pigarev.andr@yandex.ru [1]
А. Е. Пигарев, email: pigarev.andr@yandex.ru [1]
Р. М. Корсаков, email: pigarev.andr@yandex.ru [1]

[1] ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Аннотация. *Представлены различные модели атмосферы с барометрическими формулами для расчета давления на различных высотах. Дана оценка точности использования барометрических формул при расчете атмосферного давления.*

Ключевые слова: *модели атмосферы, барометрические формулы, атмосферное давление, формула Бабине.*

Введение

При решении прикладных задач физики атмосферы, аэродинамики воздушных судов и условий их полета, при разработке численных прогнозов погоды используются различные модели атмосферы, полученные на базе основного уравнения статики атмосферы в виде [1]

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g, \tag{1}$$

где $-\frac{dp}{dz}$ – вертикальная составляющая градиента давления; ρ – плотность воздуха; g – ускорение свободного падения.

Интегрирование выражения (1) при различных допущениях о характере изменения температуры и плотности воздуха с высотой позволяет получить барометрические формулы для различных моделей атмосферы с целью решения практических задач по расчету распределения давления и плотности воздуха с высотой, приведения давления к уровню моря и др.

Упрощенные модели атмосферы

1. Модель однородной атмосферы, т.е. плотность воздуха с высотой не изменяется ($\rho(z) = \rho_0 = const$).

В этом случае интегрирование выражения (1) в пределах от поверхности земли, где давление равно p_0 до уровня z с давлением $p(z)$, позволяет получить барометрическую формулу однородной атмосферы:

$$p(z) = p_0 - \rho_0 gz. \tag{2}$$

Выражение (2) указывает на то, что давление в однородной атмосфере убывает с высотой по линейному закону.

Пусть $H_{ОДН}$ высота верхней границы однородной атмосферы, где $p(z) = 0$. Тогда:

$$0 = p_0 - \rho_0 g H_{ОДН}, \tag{3}$$

откуда

$$H_{ОДН} = \frac{p_0}{\rho_0 g}. \tag{4}$$

Заменяя в (4) ρ_0 через уравнение состояния сухого воздуха $\rho_0 = \dfrac{p_0}{R_C T_0}$, можно получить:

$$H_{ОДН} = \frac{R_C T_0}{g} = \frac{273\ R_C}{g}(1 + \alpha t_0), \tag{5}$$

где $\alpha \approx 0{,}004$, t_0 – температура воздуха у поверхности земли, °C.

Из формулы (5) следует, что высота однородной атмосферы конечна и является функцией только температуры воздуха на поверхности земли.

2. Модель изотермической атмосферы, т.е. температура воздуха с высотой не изменятся ($T = T_0 = const$).

Замена в основном уравнении статики (1) плотности воздуха через уравнение состояния позволяет записать:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gdz}{R_C T_0}. \tag{6}$$

Интегрирование левой части выражения (6) в пределах от p_0 до $p(z)$, а правой части – от 0 до z, дает барометрическую формулу изотермической атмосферы:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{R_C T_0}\right). \tag{7}$$

Выражение (7) позволяет заключить, что в изотермической атмосфере давление убывает с высотой по экспоненциальному закону.

Высота изотермической атмосферы равна бесконечности, так как давление стремится к нулю, если высота стремится к бесконечности.

3. Модель политропной атмосферы, т.е. наблюдается линейное изменение температуры воздуха с высотой.

Если на исходном уровне наблюдается температура T_0, то на любой произвольной высоте z температуру воздуха можно вычислить по формуле:

$$T(z) = T_0 - \gamma z, \tag{8}$$

где γ – вертикальный градиент температуры.

Барометрическая формула политропной атмосферы может быть получена с использованием интегральной формы [1] основного уравнения статики (1):

$$\ln p(z) = \ln p_0 - \frac{1}{R_C}\int_0^z \frac{g}{T_V}dz, \tag{9}$$

где $T_V(z)$ – виртуальная температура.

С учетом того, что для сухой атмосферы $T_V(z) = T(z) = T_0 - \gamma z$ выражение (9) можно преобразовать к виду:

$$\ln p(z) = \ln p_0 - \frac{1}{R_C}\int_0^z \frac{g}{T_0 - \gamma z}dz. \tag{10}$$

Интегрирование (9) при $g = const$ дает возможность получить барометрическую формулу политропной атмосферы:

$$p(z) = p_0\left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_C \gamma}}. \tag{11}$$

Из выражения (11) следует, что $p(z) = 0$, если $T_0 - \gamma z = 0$. Следовательно, высота политропной атмосферы H_γ величина конечная:

$$H_\gamma = \frac{T_0}{\gamma}. \tag{12}$$

Выражение (12) показывает, что высота политропной атмосферы изменяется в широких пределах и зависит от величины вертикального градиента температуры. Если $T_0 = 288\ K$ и $\gamma = 0{,}65\ K/100\ м$, то $H_\gamma = 44{,}3\ км$.

Таким образом, выражения (2), (7) и (11) представляют собой барометрические формулы для рассмотренных моделей атмосферы, когда делались допущения о постоянстве плотности воздуха ρ, температуры T, градиента температуры γ, ускорения силы тяжести g, а массовая доля водяного пара s принималась равной нулю. Перечисленные или близкие к ним условия в реальной атмосфере могут наблюдаться в какие-то промежутки времени в отдельных ее слоях.

Модели реальной атмосферы

В реальной атмосфере, когда температура воздуха с высотой распределяется произвольно, в атмосфере содержится водяной пар, а ускорение силы тяжести является функцией широты места и высоты над уровнем моря (поверхности Земли), как показано в [1], барометрическая формула имеет вид:

$$z_2 - z_1 = B(1 + \alpha \bar{t})(1 + 0{,}608\ \bar{s})(1 + a_1 \cos 2\varphi)(1 + a_2 \bar{z}) \lg \frac{p_1}{p_2}, \qquad (13)$$

где $B = 2{,}3 H_0 \approx 18400\ м$ В – барометрическая постоянная; $\bar{t}$ и $\bar{s}$ – средние барометрические значения температуры и массовой доли водяного пара; a_1 и a_2 – эмпирические коэффициенты.

Выражение (13) – полная барометрическая формула Лапласа реальной атмосферы и в таком виде используется на практике лишь при производстве барометрического нивелирования.

Точность измерения исходных данных (температуры, влажности, давления), необходимых для выполнения расчетов по формуле (13), как правило, значительно меньше тех уточнений, которые дает формула Лапласа на непостоянство ускорения силы тяжести и массовой доли водяного пара, то при решении большинства практических метеорологических задач используются упрощенные барометрические формулы.

Наибольшее распространение на практике получили барометрическая формула реальной атмосферы и упрощенная барометрическая формула Бабине.

Барометрическая формула реальной атмосферы может быть получена из (13), если считать воздух сухим $\bar{s} = 0$, а ускорение силы тяжести g от широты места φ и высоты над уровнем моря z не зависит. Тогда можно записать:

$$z_2 - z_1 = B(1 + \alpha \bar{t}) \lg \frac{p_1}{p_2}. \qquad (14)$$

Если преобразовать (14) к виду:

$$z_2 - z_1 = \frac{273\ R_C}{g}(1 + \alpha \bar{t}) 2{,}3 \lg \frac{p_1}{p_2} \qquad (15)$$

и перейти к натуральным логарифмам, выражая температуру по абсолютной шкале, можно получить:

$$z_2 - z_1 = \frac{R_C \bar{T}}{g} \lg \frac{p_1}{p_2}. \qquad (16)$$

После потенцирования выражения (16) можно получить:

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{R_C \bar{T}}\right), \qquad (17)$$

где $\bar{T} = 273\ (1 + \alpha \bar{t})$ – средняя барометрическая температура слоя воздуха, заключенного между уровнями z_1 и z_2 .

Если уровень z , совпадает с уровнем моря (поверхностью земли), а уровень z_2 – произвольный $z_2 = z$, то (17) можно записать в виде:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{R_C \bar{T}}\right). \qquad (18)$$

Формула (18) имеет такой же вид, как и барометрическая формула изотермической атмосферы (7). Отличие этих формул состоит в том, что формула реальной атмосферы справедлива лишь для слоев конечной толщины, в которых каждый раз должна быть определена средняя барометрическая температура $\bar{T}$. Если изменяется толщина слоя, то изменяется и величина $\bar{T}$. В случае же изотермической атмосферы температура является независимой (задаваемой) величиной.

Упрощенная барометрическая формула Бабине может быть получена путем замены в уравнении (1) дифференциалов давления и высоты их конечными разностями:

$$dp = \Delta p = p_2 - p_1; \quad dz = \Delta z = z_2 - z_1. \qquad (19)$$

Пренебрегая изменением ускорения силы тяжести в слое $z_2 - z_1$ и заменяя плотность воздуха ρ средней плотностью этого слоя $\bar{\rho}$, выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$z_2 - z_1 = \frac{p_1 - p_2}{\bar{\rho} g}. \qquad (20)$$

Если выразить $\bar{\rho}$ через уравнение состояния сухого воздуха:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{R_C \bar{T}} = \frac{p_1 - p_2}{2 R_C \bar{T}}, \qquad (21)$$

заменяя $\bar{T} = 273 \ (1 + \alpha \bar{t})$ и подставляя (21) в (20), будем иметь:

$$z_2 - z_1 = \frac{273 \ R_C}{g} (1 + \alpha \bar{t}) \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}. \qquad (22)$$

Учитывая, что $\frac{273 \ R_C \bar{T}}{g} = H_0$ – высота однородной атмосферы, уравнение (22) можно записать в виде:

$$z_2 - z_1 = 2 H_0 (1 + \alpha \bar{t}) \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}. \qquad (23)$$

из которого для случая когда $z_1 = 0,\ p_1 = p_0$, а $p_2 = p(z)$ можно получить:

$$p(z) = \frac{p_0 (2 H_0 (1 + \alpha \bar{t}) - z)}{z + 2 H_0 (1 + \alpha \bar{t})}. \qquad (24)$$

Таким образом, выражения (2), (7), (11), (18) и (24) могут быть использованы для оперативного решения следующих практических задач:

1) определять превышение одного уровня над другим (барометрическое нивелирование);

2) определять давление на любом уровне z_2 по давлению на исходном уровне z_1 и средней температуре слоя $z_1 - z_2$;

3) определять среднюю температуру в слоя $z_1 - z_2$ по измеренным значениям давлений p_1 и p_2.

Оценка точности расчетов давления на различных высотах

Для оценки точности расчета давления на различных высотах с использованием выражений (2), (7), (11), (18) и (24), которые соответствуют рассмотренным моделям атмосферы, использованы три радиозондовых наблюдения по станции Москва в коде КН-04. Результаты проведенных расчетов приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1

Результаты расчетов по данным за 00.00 01 января 2008 года

№ п/п	Р факт.	(2)	(7)	(11)	(18)	(24)
1	1000	962,1	961,8	961,6	958	958
2	925	886,3	889,9	888,1	878	878
3	850	803,2	817,3	812,3	799	798
4	700	611,4	671,4	654,9	643	638
5	500	297,3	486,6	446,0	450	429
6	400	99,2	397,2	341,9	359	322
7	300	-141,6	310,3	240,1	273	212
8	250	-268,0	272,6	196,5	236	162
9	200	^61,0	223,7	141,1	190	92
10	150	-690,4	176,8	91,0	146	19
11	100	-1016,2	126,6	43,5	101	-69

Таблица 2

Результаты расчетов по данным за 12.00 01 января 2008 года

№ п/п	Р факт.	(2)	(7)	(11)	(18)	(24)
1	1000	965,5	965,6	965,4	961,2	961,2
2	925	889,5	894,1	892,4	881,5	881,3
3	850	806,5	821,9	817,2	801,9	801,0
4	700	615,1	677,0	661,1	644,6	639,8
5	500	297,4	490,6	450,8	448,7	427,5
6	400	103,8	403,2	349,0	359,8	323,2
7	300	-135,7	316,3	247,2	273,8	213,4
8	250	-267,8	276,7	201,2	235,5	160,3
9	200	-455,1	228,8	146,9	190,2	92,5
10	150	-682,0	181,8	96,2	146,9	20,3
11	100	-973,9	135,3	51Д	105,3	-59,7

Таблица 3

Результаты расчетов по данным за 00.00 02 января 2008 года

№ п/п	Р факт.	(2)	(7)	(11)	(18)	(24)
1	1000	960,2	960,2	959,9	955,4	955,4
2	925	884,1	888,3	886,4	875,9	875,7
3	850	801,7	816,6	811,6	797,3	796,4

4	700	615,5	675,2	659,1	644,8	639,9
5	500	298,4	488,4	448,2	449,1	427,9
6	400	110,8	403,3	349,1	362,6	326,5
7	300	-127,5	316,2	247,0	276,3	216,6
8	250	-275,8	271,8	195,5	233,3	157,0
9	200	-454,5	226,4	144,2	190,3	92,5
10	150	-687,7	178,4	92,7	145,8	18,3
11	100	-1008,4	128,6	45,2	101,2	-68,6

Анализ проведенных расчетов на модельных примерах позволяет сделать следующие выводы:

1. Модель однородной атмосферы при расчете давления на различных высотах дает смысловые значения лишь до высот 2-3 км, что указывает на нецелесообразность ее использования.
2. В слое тропосферы до высоты примерно 5 км расчеты, полученные по всем остальным формулам, дают примерно одинаковые результаты, согласующиеся со значениями фактического давления. Выше 5 км наиболее хорошо работает модель изотермической атмосферы.
3. Формула Бабине (24) на всех высотах дает существенное отклонение расчетных значений давления от фактических, что также указывает на нерациональность ее использования на практике.
4. С высоты выше 8 км для расчета давления можно использовать сокращенную формулу Лапласа, так как рассчитанные значения хорошо согласуются с фактическими.

Заключение

Таким образом, для восстановления вертикального профиля атмосферного давления при решении практических метеорологических задач достаточно использовать модель изотермической атмосферы. При этом следует учесть, что до высоты примерно 7 км эта модель дает несколько заниженный результат, а выше 7 км - несколько завышенный результат.

Список литературы

1. Матвеев, Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы / Л. Т. Матвеев. - Л.: Гидрометеоиздат, 2000. - 778 с.